# 5 Distanzfunktionen

1. Eigenschaften und Klassifikation
2. Distanzfunktionen auf Punkten
   - Minkowski-Distanzfunktion $L_m$
   - Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion $L_m^w$
   - Quadratische Distanzfunktion $d_q$
   - Quadratische Pseudo-Distanzfunktion
   - Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
   - Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
   - Kullback-Leibler-Abstandsfunktion
   - Bhattacharyya-Abstandsfunktion
3. Distanzfunktionen auf Binärdaten
4. Distanzfunktionen auf Sequenzen
   - Earth-Mover-Distanzfunktion
   - DFT-$L_2$-Distanzfunktion
   - Editierdistanz
5. Distanzfunktionen auf allgemeinen Mengen
   - Bottleneck-Distanzfunktion
   - Distanzfunktion über das Volumen der symmetrischen Differenz
   - Hausdorff-Distanzfunktion
   - Fréchet-Distanzfunktion

# Einführung

- paarweiser Vergleich der Feature-Werte von Medienobjekten
- hier die häufigsten Distanzfunktionen analysiert nach Eigenschaften
- Eigenschaften nutzbar zur Konfiguration eines MMDBS bzgl. Suchszenario
- Distanzen auf Punkten, Binärdaten, Sequenzen und allgemeinen Mengen

# 5.1 Eigenschaften und Klassifikation

- Abbildung Feature-Werte zweier Medienobjekte auf nichtnegative, reelle Zahl
- Distanzwert 0 bedeutet maximale Ähnlichkeit
- Invarianz einer Distanzfunktion
  $\longrightarrow$ also Unabhängigkeit bzgl. Operation $g$: $d(g(o_1), g(o_2)) = d(o_1, o_2)$
  - Translation
  - Skalierung
  - Rotation

# Formale Eigenschaften einer Distanzfunktion

binäre Funktion $d(o_1, o_2)$ mit $d : O \times O \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ und

- *Selbstidentität (Si):* $\forall o \in O : d(o, o) = 0$
- *Positivität (Pos):* $\forall o_1 \neq o_2 \in O : d(o_1, o_2) > 0$
- *Symmetrie (Sym):* $\forall o_1, o_2 \in O : d(o_1, o_2) = d(o_2, o_1)$
- *Dreiecksungleichung (Dreieck):*

$$\forall o_1, o_2, o_3 \in O : d(o_1, o_3) \leq d(o_1, o_2) + d(o_2, o_3)$$

# Klassifikation anhand Erfüllung der Eigenschaften

| Klasse | Si | Pos | Sym | Dreieck |
|---|---|---|---|---|
| Distanzfunktion | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Pseudo-Distanzfunktion | ✓ | – | ✓ | ✓ |
| Semi-Distanzfunktion | ✓ | ✓ | ✓ | – |
| Semi-Pseudo-Distanzfunktion | ✓ | – | ✓ | – |

# Beispiele von Distanzfunktionen

- absoluter Betrag der Differenz zweier reeller Zahlen

$$d_{abs} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{abs}(r_1, r_2) \mapsto |r_1 - r_2|$$

- euklidsche Distanzfunktion $d_{L_2}$ auf Punkten $p_i$ der Menge $\mathbb{R}^n$

$$d_{L_2} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_2}(p_1, p_2) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (p_1[i] - p_2[i])^2}$$

# Beispiel einer Pseudo-Distanzfunktion

indiskrete Pseudo-Distanzfunktion, die jedem Elementepaar aus $O \times O$ den Wert 0 zuweist:

$$d_{indiskret} : O \times O \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{indiskret}(o_1, o_2) \mapsto 0$$

(Funktion ist praktisch sinnlos)

# Beispiel einer Semi-Distanzfunktion

Semi-Distanzfunktion $d_{semi}$ auf der Menge $\{a, b, c\}$:

| $d_{semi}$ | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|
| **a** | 0 | 1 | 3 |
| **b** | 1 | 0 | 1 |
| **c** | 3 | 1 | 0 |

Die Dreiecksungleichung ist nicht garantiert:

$$\begin{aligned} d_{semi}(a,c) &\not\leq d_{semi}(a,b) + d_{semi}(b,c) \\ 3 &\not\leq 1+1 \end{aligned}$$

# Weitere Eigenschaften von Distanzfunktioen

folgende Eigenschaften werden an konkreten Funktionen getestet:

- Invarianz bzgl.
  - Translation anhand Translationsobjekt $T$:
    $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(o_1 + T, o_2 + T)$
  - Skalierung anhand Skalar $S$: $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(o_1, S * o_2)$
  - Rotation anhand Rotationsobjekt $R$: $\forall o_1, o_2 : d(o_1, o_2) = d(R * o_1, R * o_2)$
- Darstellung des Einheitskreises: alle Punkte $o \in O$, für die $d(z, o) = 1$ gilt ($z$ ist Zentrum)

# Distanzeigenschaften im Einheitskreis

verschiedene Eigenschaften sind graphisch aus Einheitskreis erkennbar:

- *Selbstidentität:* Zentrum liegt auf Kreis mit Radius 0.
- *Positivität:* Alle Punkte ungleich Zentrum liegen außerhalb des Kreises mit dem Radius 0
- *Translationsinvarianz:* Einheitskreis ändert Form nicht, wenn Zentrum verschoben wird
- *Symmetrie:* bei Translationsinvarianz und Symmetrie teilt Zentrum jede Diagonale zwischen zwei Randpunkten in genau zwei gleich lange Teile
- *Rotationsinvarianz:* Einheitskreis ist bezüglich Zentrum rotationssymmetrisch

# 5.2 Distanzfunktion auf Punkten

Datentyp: **array** [**1..n**](**real**)

- Minkowski-Distanzfunktion $L_m$
- Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion $L_m^w$
- Quadratische Distanzfunktion $d_q$
- Quadratische Pseudo-Distanzfunktion
- Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
- Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion
- Kullback-Leibler-Abstandsfunktion
- Bhattacharyya-Abstandsfunktion

# Minkowski-Distanzfunktion $L_m$

am häufigsten eingesetzte Distanzfunktion auf Punkten mit $m > 0$:

$$d_{L_m} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_m}(p_1, p_2) \mapsto \left( \sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m}$$

| | |
|---|---|
| $m = 1$: | Manhattan-Distanzfunktion oder Blockdistanzfunktion |
| $m = 2$: | euklidsche Distanzfunktion |
| $m = \infty$: | Max-Distanzfunktion oder Tschebyscheff-Distanzfunktion |

Sonderfall bei $m = \infty$:

$$d_{L_\infty} = d_{L_{max}}(p_1, p_2) \mapsto \max_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|$$

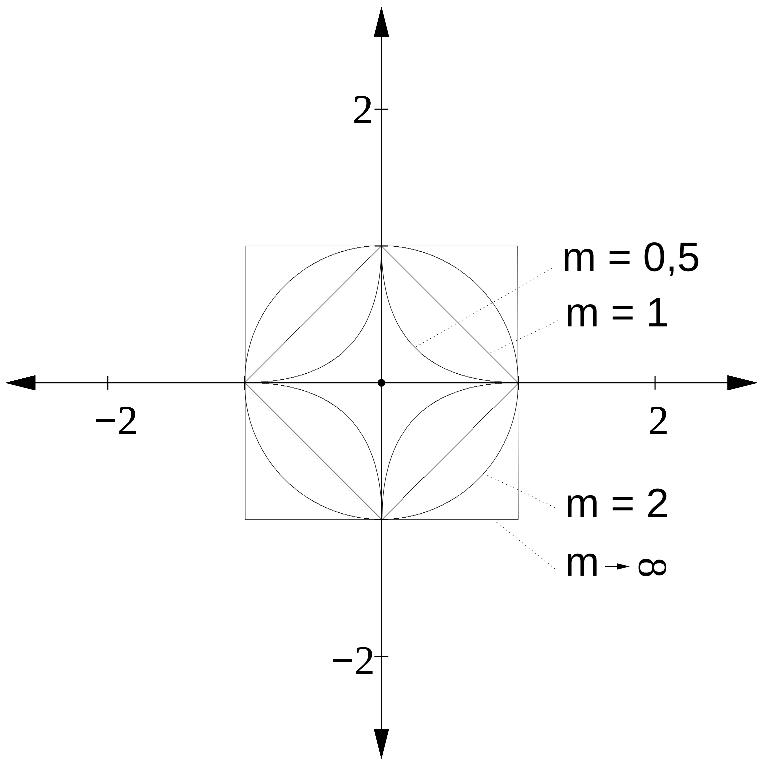
# Translationsinvarianz

$T$ sei ein $n$-dimensionaler Vektor, der durch die Differenzberechnung aus der Formel verschwindet:

$$
\begin{aligned}
d_{L_m}(p_1+T, p_2+T) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |(p_1[i]+T) - (p_2[i]+T)|^m\right)^{1/m} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} |p_1[i] - p_2[i]|^m\right)^{1/m} \\
&= d_{L_m}(p_1, p_2)
\end{aligned}
$$

aber keine Skalierungs- oder Rotationsinvarianz

# Einheitskreise



# Holdersche Ungleichung

es gilt immer:

$$(|a_1|^{m_1} + \ldots + |a_n|^{m_1})^{1/m_1} \leq (|a_1|^{m_2} + \ldots + |a_n|^{m_2})^{1/m_2} \text{ für } m_1 \geq m_2 \geq 1$$

also: Einheitskreis mit niedrigerem $m$-Wert liegt innerhalb Einheitskreises mit höherem $m$-Wert

# Sonderfall euklidsche Distanzfunktion ($m = 2$)

- entspricht der Länge der Geraden durch beide Punkte
- Einheitskreis ist kreisförmig
- Rotationsinvarianz ist erfüllt, da $R$ Orthonormalmatrix ($R^T * R = R * R^T = I$)

$$\begin{aligned}
d_{L_2}(R * p_1, R * p_2) &= \sqrt{(R * p_1 - R * p_2)^T * (R * p_1 - R * p_2)} \\
&= \sqrt{(R * (p_1 - p_2))^T * (R * (p_1 - p_2)))} \\
&= \sqrt{(p_1 - p_2)^T * R^T * R * (p_1 - p_2)} \\
&= \sqrt{(p_1 - p_2)^T * (p_1 - p_2)} \\
&= d_{L_2}(p_1, p_2)
\end{aligned}$$

- Matrizenschreibweise: $d_{L_2}(p_1, p_2) = \sqrt{(p_1 - p_2)^T * (p_1 - p_2)}$

# Berechnung von Reihenfolgen anhand Minkowski-Distanzfunktion $L_m$

Achtung: unterschiedliche $m$-Werte erzeugen unterschiedliche Reihenfolgen!

Beispiel:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } p_2 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Abstände dieser Punkte vom Koordinatenursprung $O$:

$$d_{L_1}(O, p_1) = 1 \text{ und } d_{L_1}(O, p_2) = 1.6$$

$$d_{L_\infty}(O, p_1) = 1 \text{ und } d_{L_\infty}(O, p_2) = 0,8$$

# Gewichtete Minkowski-Distanzfunktion $L_m^w$

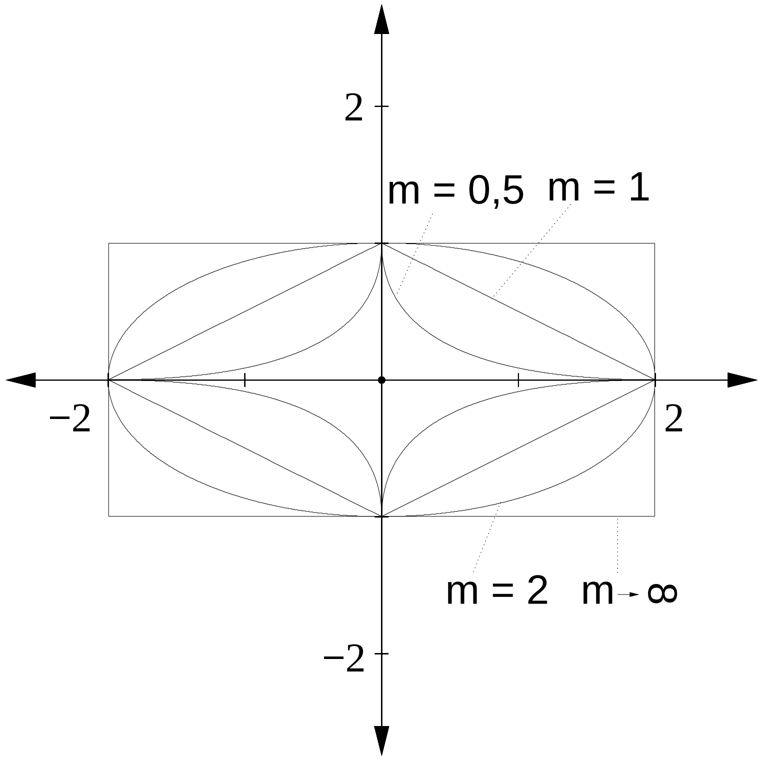
achsenparallele Stauchung und Streckung durch Gewichte $w_i \geq 0$:

$$d_{L_m}^w : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, d_{L_m}(p_1, p_2) \mapsto \left( \sum_{i=1}^{n} w_i * |p_1[i] - p_2[i]|^m \right)^{1/m}$$

Forderung:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

# Einheitskreis



# Invarianzen

- Translationsinvarianz
- keine Skalierungsinvarianz
- keine Rotationsinvarianz

# Quadratische Distanzfunktion $d_q$

Matrizenschreibweise:

$$d_q(p_1, p_2) = (p_1 - p_2)^T * A * (p_1 - p_2)$$

$A$ im $n$-dimensionalen Raum ist symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbb{R}^{n \times n}$

# Matrix $A$

- *Einheitsmatrix* $E$: $d_q$ identisch mit $d^2_{L_2}$
- *Diagonalmatrix*: $d_q$ entspricht $d^2_{L^w_2}$
  (Gewichte korrespondieren zu Diagonalelementen)
- *ansonsten*: nonuniforme Skalierung, Rotation, Spiegelung der Punkte

# Symmetrische positiv definite Matrix $A$

es gilt immer: $A = U * L * U^T$ (Eigenwertzerlegung):

- $U$ ist orthonormale Matrix (Rotation anhand Eigenvektoren)
- $L$ ist Diagonalmatrix (Skalierung anhand Eigenwerten)
- Berechnung der Distanz mittels $d^2_{L_2}$ auf transformierten Punkten oft relativ schnell realisierbar

$$
\begin{aligned}
d_q(p_1, p_2) &= (p_1 - p_2)^T A \; (p_1 - p_2) \\
&= (p_1 - p_2)^T U L U^T (p_1 - p_2) \\
&= \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2)\right)^T \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2)\right) \\
&= \left(L^{1/2} U^T p_1 - L^{1/2} U^T p_2\right)^T \left(L^{1/2} U^T p_1 - L^{1/2} U^T p_2\right) \\
&= d^2_{L_2}(L^{1/2} U^T p_1, L^{1/2} U^T p_2)
\end{aligned}
$$

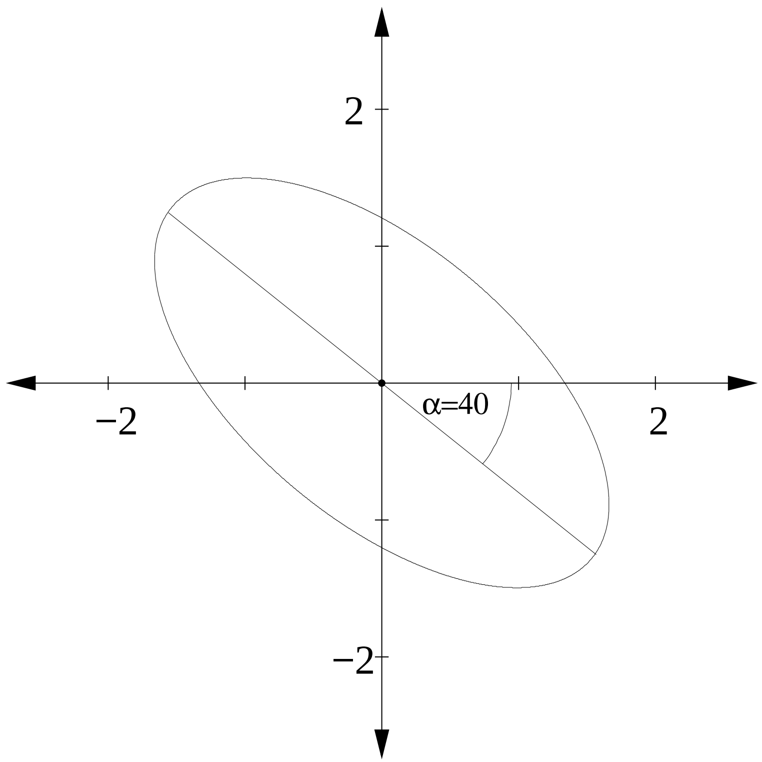
# Invarianzen

- Translationsinvarianz
- keine Skalierungsinvarianz
- keine Rotationsinvarianz

# Beispielmatrix

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0,5599 & 0,3693 \\ 0,3693 & 0,6901 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 40 & \sin 40 \\ -\sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos 40 & -\sin 40 \\ \sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

# Einheitskreis des Beispiels



# Mahalanobis-Distanzfunktion

- Einsatz der quadratischen Distanzfunktion $d_q$, wenn Distanzberechnung Kombination unterschiedlicher Dimensionen erfordert
- Grundlage kann Kovarianzmatrix $C$ auf $d$ Dimensionen sein
  $\longrightarrow$ Mahalanobis-Distanzfunktion $d_M(p_1, p_2)$

$$d_M(p_1, p_2) = |det\ C|^{1/d}(p_1 - p_2)^T * C^{-1} * (p_1 - p_2)$$

# Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

- Aufgabe der Forderung nach Positiv-Definitheit für $A$
- Ziel: unsymmetrische Translationsinvarianz bzgl. Vektoren $t$ des Vektorunterraums $T$:

$$pd_q(p_1, p_2 + t) = pd_q(p_1, p_2)$$

- Konstruktion der Matrix $A$ aus geeigneter Orthogonalmatrix $U$ und Diagonalmatrix $L$
- den $U$-Vektoren entsprechende Diagonalwerte auf Null setzen
- seien $s_i$ mit $i = 1, \ldots m$ die durch $l_i$ auf Null gesetzten $U$-Spaltenvektoren, dann gilt:

$$T = \left\{ t \in \mathbb{R}^n | t = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * s_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

# Nachweis der Translationsinvarianz

$$
\begin{aligned}
& pd_q(p_1, p_2 + t) \\
= \quad & (p_1 - p_2 - t)^T A (p_1 - p_2 - t) \\
= \quad & (p_1 - p_2 - t)^T U L U^T (p_1 - p_2 - t) \\
= \quad & (p_1 - p_2 - t)^T U L^{1/2} L^{1/2} U^T (p_1 - p_2 - t) \\
= \quad & \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2 - t)\right)^T \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2 - t)\right) \\
= \quad & \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2) - L^{1/2} U^T t\right)^T \left(L^{1/2} U^T p_1 - p_2) - L^{1/2} U^T t\right) \\
= \quad & \left(L^{1/2} U^T (p_1 - p_2)\right)^T \left(L^{1/2} U^T p_1 - p_2)\right) \\
= \quad & pd_q(p_1, p_2)
\end{aligned}
$$

# Beispiel Quadratische Pseudo-Distanzfunktion

Konstruktion Translationsinvarianz im Winkel 40 Grad:

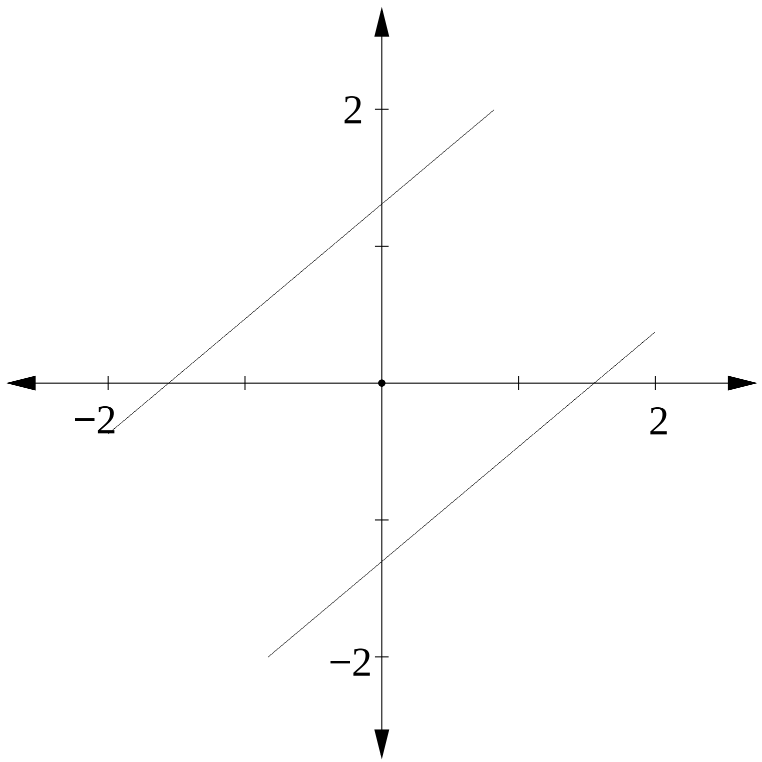
$$U = \begin{pmatrix} \cos 40 & -\sin 40 \\ \sin 40 & \cos 40 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kombination dieser Matrizen ergibt die gewünschte Matrix $A$:

$$U * L * U^T = \begin{pmatrix} 0,4132 & -0.4924 \\ -0,4924 & 0,5868 \end{pmatrix}$$

# Einheitskreis des Beispiels



# Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

folgende Beobachtungen Chang/Wu03 bzgl. Unähnlichkeit im hochdimensionalen Raum:

- ähnliche Objekte liegen meist nur in wenigen Dimensionen nebeneinander
- Ähnlichkeit kann häufig nicht an bestimmten Dimensionen festgemacht werden

Problem mit Minkowski-Distanzfunktion: alle Dimensionen werden berücksichigt

# Dynamical-Partial-Semi-Pseudo-Distanzfunktion (2)

- Berücksichtigung einer dynamischen Untermenge der Dimensionen
- $p_1$ und $p_2$ seien zwei Punkte im $n$-dimensionalen Raum und $\delta_i = |p_1[i] - p_2[i]|$ der Abstand in Dimension $i$
- nur die $m$ kleinsten Abstände werden berücksichtigt:
  $\Delta_m = \{\texttt{die kleinsten m } \delta\texttt{-Werte aus } (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)\}$

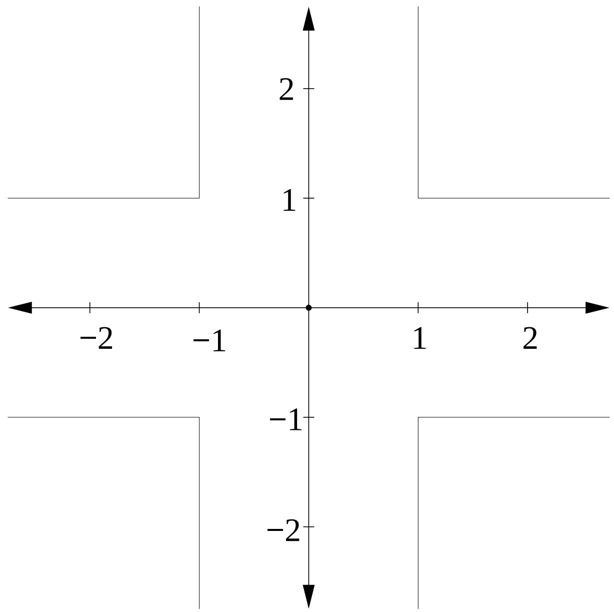
$$d_{dp}^{m,r} = \left( \sum_{\delta_i \in \Delta_m} \delta_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

# Eigenschaften

- Selbstidentität und Symmetrie sind erfüllt
- Verletzung der Positivität und Dreiecksungleichung

# Einheitskreis

zweidimensionaler Raum und $m = 1$



# Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion

- Abstand zwischen Histogrammen mit absoluten Häufigkeiten
- ursprünglich in Statistik entwickelt
  Untersuchung von Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen
- basiert auf Nullhypothese: Häufigkeitsverteilungen sind gleich
  also Differenz zwischen erwarteter und tatsächlicher Häufigkeiten sind 0

# Chi-Quadrat-Semi-Pseudo-Distanzfunktion (2)

$$spd_{\chi^2}(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(p_1[j] - \hat{p}_1[j])^2}{\hat{p}_1[j]} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(p_2[j] - \hat{p}_2[j])^2}{\hat{p}_2[j]} \text{ für } p_1, p_2 \in \mathbb{N}_0^n$$

erwartete Häufigkeiten:

$$\hat{p}_i[j] = \frac{(p_1[j] + p_2[j]) * \sum\limits_{a=1}^{n} p_i[a]}{\sum\limits_{a=1}^{n} (p_1[a] + p_2[a])}.$$

# Beispiel

- Test, ob Grippedoppelimpfung Grippe verhindern kann
- Befragung verschiedener Personen über Auftreten von Grippe und Impfungen
- erwartete Werte sind in Klammern notiert

| | **keine Impfung** | **eine Impfung** | **Doppelimpfung** | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| Grippe | 24 (14,398) | 9 (5,014) | 13 (26,588) | 46 |
| keine Grippe | 289 (298,602) | 100 (103,986) | 565 (551,412) | 954 |
| $\sum$ | 313 | 109 | 578 | 1000 |

# Berechnung der erwarteten Häufigkeiten

- wenn kein Zusammenhang zwischen Impfung und Grippe, dann Wert jeder Zelle abschätzbar

- Beispiel Grippe/keine Impfung:
  - Wahrscheinlichkeit für Grippe ist 46/1000
  - Wahrscheinlichkeit für keine Impfung ist 313/1000
  - Wahrscheinlichkeit für Grippe/keine Impfung: 46/1000*313/1000
  - erwartete Häufigkeit: 46/1000*313/1000*1000=46*313/1000=14,398

# Eigenschaften

- Selbstidentität und Symmetrie sind erfüllt
- Rotationsinvarianz
- keine Positivität
- keine Dreiecksungleichung

# Einheitskreis